Producto Interno

by gira

10/10/2009

1. Definición

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y sean $u \in V$, $v \in V$, $w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $(\cdot, \cdot) : V_{\mathbb{C}} \text{x} V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ es un *producto interno* (pi) en V si se cumplen los siguientes axiomas:

$a_1)$ $(u, v) = \overline{(v, u)} \quad \vee \quad (u, v) = (v, u)$ si V es $\mathbb{R}$-ev

$a_2)$ $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$

$a_3)$ $(\alpha u, v) = \overline{\alpha}(u, v) \quad \vee \quad (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ si V es $\mathbb{R}$-ev

$a_3)$ $(u, u) > 0 \quad \wedge \quad (u, u) = 0 \iff u = 0_V$

2. Propiedades del pi

(i) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$

(ii) $(u, \alpha v) = \alpha(u, v)$

(iii) $(v, 0_V) = 0$

El producto interno canónico (pic)

En $\mathbb{R}^n : (u, v) = u^T v$

En $\mathbb{C}^n : (u, v) = u^H v = \overline{(u^T)} v$

En $\mathbb{R}^{nxn} : (A, B) = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{n \\ n}} a_{ij} b_{ij}$

3. Norma y distancia

Sea V un $EVPI$ (espacio vectorial con prod. int.), se define como *norma* al número real

$\|u\| = (u, u)$

y la *distancia* entre dos elementos u y v de V se define como:

$d(u, v) = \|v - u\|$

3.1. Propiedades de la norma

(i) $\|u\| > 0 \quad \wedge \quad \|u\| = 0 \iff u = 0_V$

(ii) $\|ku\| = |k| \, \|u\| \quad (k \in K)$

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad Triangular)

4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Ver apunte 7.

5. Ortogonalidad

5.1. Definición

Dos elementos u y v de V $(EVPI)$ son ortogonales $\iff (u, v) = 0$

Atención: La ortogonalidad depende del producto interno del correspondiente espacio vectorial

5.2. Propiedad Pitagórica

Si u y v son ortogonales $\Longrightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Si el espacio vectorial es Real entonces se cumple el "si y solo si".

5.3. Conjuntos Ortogonales

Definición: $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es un conjunto ortogonal $\Longleftrightarrow \quad (u_i, u_j) = 0 \quad \forall\ i \neq j$

Propiedad: Todo conjunto ortogonal que no contenga al 0_V es LI

B es una base ortogonal (BOG) si es base y es ortogonal

5.4. Conjuntos Ortonormales

Definición: $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es un conjunto ortonormal $\Longleftrightarrow \begin{cases} (u_i, u_j) = 0 \ \ \forall i \neq j \\ \|u_i\| = 1\ ,\ \ i = 1, ..., r \end{cases}$

B es una base ortonormal (BON) si es base y es ortonormal

$\frac{v}{\|v\|}$ es llamado *versor asociado a* v y tiene norma 1.

6. Matriz del Producto Interno (Matriz de Gram)

Sea $B = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ base de V $(EVPI)$, y sean v y w de V, entonces:

$(v, w) = [v]_B^H.G_B.[w]_B$ // Con la otra notación: $(v, w) = C_B(v)^H.G_B.C_B(w)$

donde $G_B = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \cdots & (u_1, u_r) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_2, u_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_r, u_1) & (u_r, u_2) & \cdots & (u_r, u_r) \end{pmatrix}$

$G_B \in K^{rxr}$ (Si $dim(V) = r$)
- Hermítica (Simétrica)
- Definida Positiva
- Inversible

6.1. Observaciones

- $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ es *hermítica* $\iff$ $A = A^H$ $(a_{ij} = \overline{a_{ji}})$

- $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es *simétrica* $\iff$ $A = A^T$ $(a_{ij} = a_{ji})$

- Si $K = \mathbb{C}$, entonces sea $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ hermítica $\implies$ A es *definida positiva* $\iff$ $x^H Ax \geq 0$ $\forall\ x \quad \wedge \quad x^H Ax = 0 \iff x = 0$

- Si $K = \mathbb{R}$, entonces sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica $\implies$ A es *definida positiva* $\iff$ $x^T Ax \geq 0$ $\forall\ x \quad \wedge \quad x^T Ax = 0 \iff x = 0$

- Sea $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ $(\mathbb{R}^{nxn})$ hermítica (simétrica) $\implies$ A es *definida positiva* $\iff$ todos los subdeterminantes (o menores) principales de A son > 0

- Sea $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ $(\mathbb{R}^{nxn})$ hermítica (simétrica) $\implies$ A es *definida positiva* $\iff$ todos los autovalores de A son > 0

6.2. Casos Especiales

- $B = \{g_1, g_2, ..., g_r\}$ BOG de V $\implies$ $G_B = \begin{pmatrix} (g_1, g_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (g_2, g_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (g_r, g_r) \end{pmatrix}$ (Diagonal)

- $B = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ BON de V $\implies$ $G_B = I$ (pues $\|u_i\| = 1$)

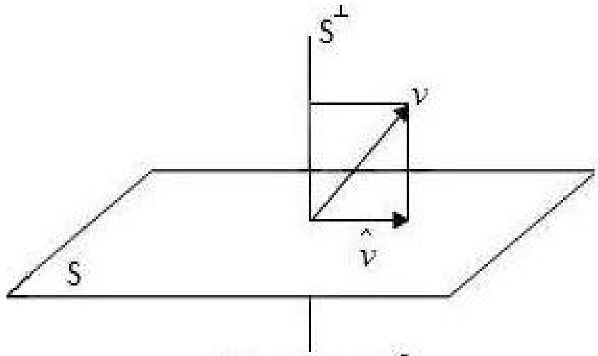
7. Proyecciones Ortogonales

Sea V un $EVPI$, S un subespacio de V y $v \in V$:

7.1. Definición

$\widehat{v}$ es la proyección de v sobre S $\iff$ $\begin{cases} \widehat{v} \in S \\ v - \widehat{v} \perp S \quad \vee \quad (v - \widehat{v}, w) = 0 \ \ \forall\ w \in S \end{cases}$

<u>Notación:</u> $\widehat{v} = p_S(v)$ ó $\widehat{v} = p_S v$



Ejemplo en R^3

7.2. Propiedades

- Si existe la proyección de v sobre $S \implies p_S(v)$ es única
- $p_S(u+v) = p_S(u) + p_S(v)$
- $p_S(kv) = kp_S(v)$
- $p_S(v) = v \iff v \in S$
- $p_S(v) = 0_V \iff v \perp S$

7.3. Fórmula de proyección

Sea S un subespacio de V y $B = \{g_1, g_2, ..., g_r\}$ una BOG de S, entonces:

$$p_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(g_i, v)}{\|g_i\|^2}.g_i$$

Caso particular: Si $B = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es BON de S, entonces:

$$p_S(v) = \sum_{i=1}^{r} (u_i, v).u_i$$

7.4. Método de Gram-Schmidt (Construcción de una BOG)

Sea S subespacio de V y $B = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ base de S $\Longrightarrow$ $\exists\ B' = \{g_1, g_2, ..., g_r\}$ BOG de S donde:

$g_1 = v_1$

$g_i = v_i - p_{S_{i-1}}(v_i)$ donde $S_{i-1} = \{g_1, ..., g_{i-1}\}$ con $2 \leq i \leq r$

7.5. La proyección como mejor aproximación

Sea S subespacio de V y $v \in V$, si $\widehat{v} = p_S(v)$ resulta:

$d(v, \widehat{v}) \leq d(v, w) \ \ \forall\ w \in S \qquad (\ \|v - \widehat{v}\| \leq \|v - w\|\ )$

es decir, $\widehat{v}$ es el vector de S que está "más cerca" de v o "mejor aproxima" a v.

7.5.1. Distancia de un vector a un subespacio

$d(v, S) = \|v - \widehat{v}\|$

7.6. Complemento Ortogonal

7.6.1. Definición

Sea S subespacio de V $(EVPI)$ entonces el *complemento ortogonal de* S se define como:

$S^{\perp} = \{v \in V\ /\ (v, w) = 0\ \ \forall\ w \in S\}$

$S^{\perp}$ es subespacio de V.

Si $S = gen\{v_1, v_2, ..., v_q\} \subset V \Longrightarrow S^{\perp} = \{v \in V\ /\ (v, v_1) = 0, ..., (v, v_q) = 0\ \}$

7.6.2. Propiedad

Sea $S \subseteq V$ un subespacio de V tal que $\forall\ v \in V$ existe $p_S(v)$

$\Longrightarrow \quad S \oplus S^{\perp} = V \qquad (\ S \cap S^{\perp} = \{0_V\} \ \wedge \ S + S^{\perp} = \ V \ )$

7.6.3. Corolarios

(i) Si $dim(S)$ es finita $\Longrightarrow \ \exists \ p_S(v) \ \ \forall \ v \in V \ \Longrightarrow \ S \oplus S^{\perp} = V$

(ii) Si $dim(V) = n \ \Longrightarrow \ dim(S \oplus S^{\perp}) = dim(S) + dim(S^{\perp}) = n$

(iii) Si $S \oplus S^{\perp} = V \ \Longrightarrow \ (S^{\perp})^{\perp} = S$

(iv) Si $S \oplus S^{\perp} = V \ \Longrightarrow \ v = p_S(v) + p_{S^{\perp}}(v) \ \ \forall \ v \in V$

7.6.4. Casos Especiales

• Si $S = Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = 0\}$,

En general, para *p.i. canónico*:

$x \in Nul(A) \iff Ax = 0 \iff (F_i^T, x) = 0 \iff x \perp Fil(A) \iff x \in [Fil(A)]^{\perp} \Longrightarrow$ $\boxed{Nul(A) = [Fil(A)]^{\perp}}$

$\Longrightarrow \ S^{\perp} = Fil(A)$

• Si $S = Nul(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ A^T x = 0\}$,

$Nul(A^T) \perp Fil(A^T) = Col(A) \Longrightarrow \boxed{Nul(A^T) = [Col(A)]^{\perp}} \Longrightarrow \ S^{\perp} = Col(A)$

7.8. Matriz de Proyección

<u>Atención</u>: A partir de ahora usamos sólo p.i. canónico.

Sea $V = K^n$ (p.i.c.), S subespacio de V :

7.8.1. Definición

$P \in K^n$ es la *matriz de proyección sobre* S si $P.v = p_S(v)$ tal que $P = QQ^H$, con $Q = [u_1$ u_2 ..... $u_r]$ y $B = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ una BON de S.

7.8.2. Propiedades

- P es única
- $Q = [u_1 \; u_2 \; ..... \; u_r] \implies Col(Q) = gen\{u_1, u_2, ..., u_r\} = S$
- $Q^H Q = I$
- $Col(P) = Col(Q) = S$
- $P^H = P$ (Hermítica) $\wedge$ $P^2 = P$ (Idempotente)

Obs: $rg(P) = dim(S) = r$

7.8.3. Relación entre P_S y $P_{S^\perp}$

Si P_S la matriz de proyección sobre S y $P_{S^\perp}$ la matriz de proyección sobre $S^\perp$ entonces:

$v = p_S(v) + p_{S^\perp}(v) \quad \forall \; v \in R^n$

$v = P_S.v + P_{S^\perp}.v$

$I.v = (P_S + P_{S^\perp}).v \implies \boxed{P_S + P_{S^\perp} = I}$

7.8.4. Un par de observaciones

- $P.v \in Col(P) \implies v - P.v \in [Col(P)]^\perp$
- P es inversible $\iff$ $\det(P) \neq 0 \iff ... \iff \underline{P = I}$
- Si $P \neq I \implies rg(P) \leq (n-1)$
- $P^T = P \implies Nul(P^T) = [Col(P)]^\perp \implies Nul(P) = [Col(P)]^\perp \implies \underline{Nul(P) \perp Col(P)}$

$\implies \boxed{Nul(P) \oplus Col(P) = R^n}$